

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE CÉLULAS DE COMBUSTÍVEL NUCLEAR EM GEOMETRIA ELÍPTICA PELA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Thiago Antonini Alves¹
Marcelo Ferreira Pelegrini²
Ricardo Alan Verdú Ramos³
Cassio Roberto Macedo Maia⁴

Resumo

Problemas difusivos com fontes distribuídas em seu domínio possuem importante aplicação no projeto de células de combustível em reatores nucleares. Estas células apresentam dimensões reduzidas e liberam altas taxas de energia térmica resultante da reação de fissão nuclear do material. Um parâmetro de projeto de tais reatores está relacionado com o controle da máxima potência gerada em uma unidade, devido à temperatura limite do material físsil. No presente trabalho é realizada uma análise do comportamento térmico de células de combustível nuclear cilíndricas com seção transversal de geometria elíptica submetidas às condições de contorno de primeiro tipo (condição de *Dirichlet*). Devido às grandes variações da temperatura no interior da célula, na formulação do problema, as propriedades termofísicas foram consideradas variáveis. O efeito da depressão do fluxo de nêutrons térmicos no interior destas células também foi levado em consideração. Consequentemente, a equação diferencial que modela o processo de difusão de calor tem uma estrutura não-linear. Para a determinação da distribuição do fluxo neutrônico e da temperatura na célula de combustível a Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG) foi utilizada sobre as equações de difusão de nêutrons e de calor no domínio da célula. Feito isso, os parâmetros físicos de interesse foram determinados para alguns casos e os resultados obtidos foram comparados com os resultados disponíveis na literatura.

Palavras-chave: célula de combustível nuclear; Transformada Integral; problemas difusivos não-lineares.

¹ UTFPR, DAMEC, Ponta Grossa-PR, thiagoaalves@utfpr.edu.br

² Unesp, DEM, Ilha Solteira-SP, mpelegrini@gmail.com

³ Unesp, DEM, Ilha Solteira-SP, ramos@dem.feis.unesp.br

⁴ Unesp, DEM, Ilha Solteira-SP, cassio@dem.feis.unesp.br

Abstract

Diffusive problems with distributed sources in its domain have important application in the project of fuel cells in nuclear reactors. Such cells have small dimension and liberate high rates of thermal energy as result of the fission nuclear of the material. A design parameter of such reactors is related to the control of the maximum power generated in a unity, because must be taken into account the temperature limit of the fissile material. In this work an analysis of thermal behavior of cylindrical fuel cells with elliptical cross-section submitted to boundary conditions of first kind is presented (*Dirichlet boundary condition*). Due to large temperature fluctuations within the cell, in the problem formulation the thermophysical properties were considered variable. The effect of depression of the thermal neutron flux inside these cells was also taken into consideration. Consequently, the differential equation that models the heat diffusion process has a non-linear structure. To obtain the distribution of the neutron flux and temperature in the fuel cell the Generalized Integral Transform Technique (GITT) was used onto the neutron diffusion and heat equations in the domain of the cell. Thus, physical parameters of interest were determined for some cases and the obtained results were compared with the results available in the literature.

Keywords: nuclear fuel cell; Integral Transform; nonlinear diffusive problems.

1. Introdução

Problemas difusivos que apresentam fontes distribuídas em seu domínio representam um grande desafio à Engenharia e vêm atraindo a atenção de diversos pesquisadores no assunto, uma vez que, as equações diferenciais fundamentais que regem os princípios de conservação são, em geral, de natureza complexa e consequentemente, não podem ser resolvidas por técnicas analíticas clássicas.

Uma importante aplicação de problemas desta natureza, diz respeito a células de combustível em reatores nucleares. Estas células apresentam dimensões reduzidas e liberam altas taxas de energia térmica resultante da reação de fissão nuclear do elemento físsil. Neste contexto, é de grande interesse o domínio de cálculo da potência térmica visto que há um limite suportável para estas células que corresponde à temperatura do ponto de fusão do combustível. Este limite crítico é fundamental no projeto de construção da célula e de todo o conjunto de feixe do núcleo de combustível (GLASSTONE & SESONSKE, 1994), pois a maximização da transferência da energia gerada para o fluido de trabalho, sem ultrapassar a

temperatura limite, possibilita a construção de vasos de pressão de menores dimensões, bem como o estabelecimento de um inventário de combustível nuclear menor.

Diante da necessidade da obtenção de soluções mais precisas para modelos físicos mais realísticos foi imperativo que o desenvolvimento e o aperfeiçoamento de novas metodologias pudessem contemplar, por exemplo, o acoplamento entre as equações de conservação, a não-linearidade das relações constitutivas, processos com mudança de fase, condições de contorno não-lineares, entre outros. A evolução de equipamentos e ferramentas computacionais criou condições para que diversas técnicas numéricas fossem intensamente desenvolvidas e permitissem a obtenção da solução destes problemas de natureza complexa (PELEGRINI, 2005).

Recentemente, a aplicação de técnicas híbridas analítico-numéricas vem ganhando destaque em várias áreas de interesse da Engenharia, por garantirem maior confiabilidade dos resultados a um menor custo computacional. A Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG (COTTA, 1998), em particular, é uma ferramenta com estas características e vem demonstrando ser poderosa para a solução de problemas de transferência de calor e massa, os quais, geralmente, não possuem solução pelas técnicas analíticas clássicas. Nos processos puramente difusivos, a TTIG está sendo aplicada com sucesso em problemas que apresentam domínios de geometria não-convencional, Maia (2003) e Alves (2006), problemas difusivos tridimensionais e não-lineares, Mikhailov & Cotta (1996), problemas com condições de contorno variáveis no espaço, Cotta & Özisik (1987), problemas difusivos que envolvem movimento de fronteiras, Diniz *et al.* (1990), entre outros.

Sendo assim, neste trabalho a TTIG será utilizada para a obtenção de solução de problemas difusivos transiente com fontes variáveis em células cilíndricas de combustível nuclear com seção transversal elíptica. Para esta análise, as propriedades termofísicas são consideradas variáveis com a temperatura. A dificuldade inerente da aplicação das condições de contorno em problemas com esta geometria foi removida empregando-se uma mudança adequada de coordenadas. Para facilitar o tratamento analítico, a equação da difusão foi convenientemente

linearizada através da técnica da transformada de *Kirchhoff* (ÖZISIK, 1996). Feito isso, a equação da energia resultante é resolvida através da aplicação da TTIG e, os parâmetros físicos de interesse, como por exemplo, distribuição de temperatura, constante de tempo e fator de intensificação, foram, então, calculados.

2. Formulação Matemática

Para o problema da célula de reator nuclear em questão, supõe-se que o termo fonte é proporcional ao fluxo de difusão neutrônica através do elemento combustível. Esta difusão neutrônica é um fenômeno complexo de difícil solução. Sendo assim, neste trabalho, este problema será estudado pela teoria da difusão, a qual é baseada na Lei de *Fick*. Este procedimento é utilizado no projeto da maioria dos reatores de potência e, alguma vezes é chamado de aproximação por difusão. Para esta análise, considera-se que as propriedades térmicas variam com a temperatura e assume-se que a temperatura é constante no contorno do elemento combustível. Também se admite que o perfil da temperatura inicial é uniforme. Neste modelo, a equação da difusão em meios cilíndricos elíptico é dada por

$$\nabla \cdot [k(T) \nabla T(x, y, t)] + \bar{q}''' g(x, y) = \rho(T) c_p(T) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t}, \quad \{(x, y) \in \Omega, \quad t > 0\}, \quad (1)$$

$$T(x, y, t) = T_p, \quad \{(x, y) \in \Gamma, \quad t > 0\}, \quad (2)$$

$$T(x, y, 0) = T_i = T_p, \quad \{(x, y) \in \Omega\}, \quad (3)$$

1.1. Linearização da Equação da Difusão

Para facilitar o procedimento analítico, a equação diferencial será adequadamente linearizada fazendo uso da Transformada de Kirchhoff. Define-se assim, uma nova variável T^* como:

$$T^*(x, y) = \frac{1}{k_0} \int_{T_0}^{T(x, y)} k(T') dT', \quad (4)$$

sendo que, $k_0 = k(T_0)$. Desta definição, segue que o gradiente da nova variável é dado por:

$$\nabla T^*(x, y) = \frac{1}{k_0} k(T) \nabla T(x, y). \quad (5)$$

A equação da difusão é reescrita, então, como:

$$\nabla^2 T^*(x, y) + \frac{\bar{q}'''}{k_0} g(x, y) = \frac{1}{\alpha(T)} \frac{\partial T^*(x, y)}{\partial t}, \quad \{(x, y) \in \Omega\}, \quad (6)$$

$$T^*(x, y) = T_P^* = \frac{1}{k_0} \int_{T_0}^{T_P} k(T') dT', \quad \{(x, y) \in \Gamma\}, \quad (7)$$

$$T^*(x, y, 0) = T_i^* = T_p^*, \quad \{(x, y) \in \Omega\}, \quad (8)$$

A não linearidade que ocorre no coeficiente do termo difusivo será convenientemente removida através da transformação de coordenadas que adimensionaliza a equação da difusão. Sendo assim, a forma adimensional da Eq. (6) é escrita como:

$$\nabla^2 \theta(X, Y, \tau) + g(X, Y) = \frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial \tau}, \quad \{(X, Y) \in \Omega\}, \quad (9)$$

$$\theta(X, Y) = 0, \quad \{(X, Y) \in \Gamma\}, \quad (10)$$

$$X = \frac{x}{L_{ref}}, \quad Y = \frac{y}{L_{ref}}, \quad \tau = \frac{t \alpha(T)}{L_{ref}}, \quad \theta(X, Y) = \frac{[T^*(X, Y) - T_p^*] k_0}{L_{ref}^2 \bar{q}'''}, \quad L_{ref} = \frac{A_S}{Per} \quad (11a, b, c, d)$$

Os parâmetros geométricos de interesse são visualizados na Fig. 1. Observe-se que o problema proposto apresenta simetria em relação ao eixo X e ao eixo Y de forma que é suficiente considerar somente o domínio em um quadrante.

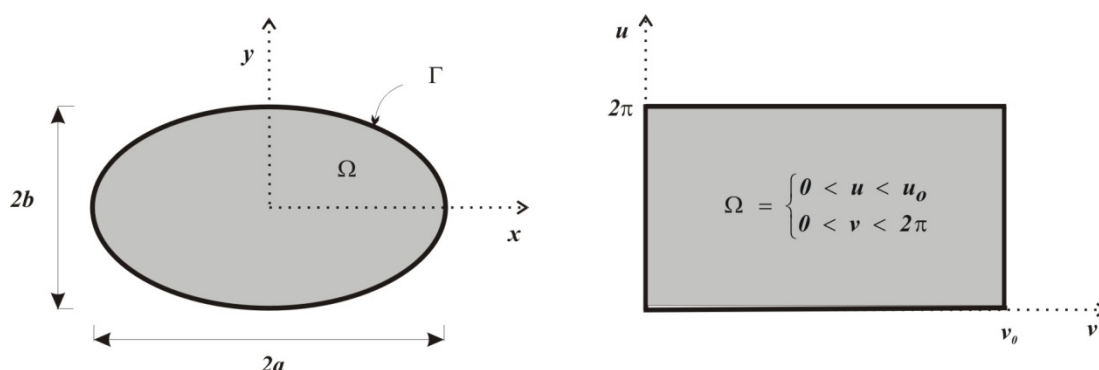


Figura 1 – Parâmetros geométricos e mudança de coordenadas do sistema cartesiano para o sistema elíptico.

Fonte: Autoria própria.

1.2. Mudança do Sistema de Coordenadas

A conveniência de se proceder a transformação de coordenadas se deve ao fato de que uma seção elíptica, quando representada no sistema de coordenadas cartesianas, traz a necessidade da manipulação de expressões complexas resultantes desta representação. O sistema ortogonal de coordenadas elípticas é utilizado, então, para transformar o domínio original com contorno de formato elíptico no plano (X, Y) em um domínio com contorno de formato retangular no plano transformado (u, v) (Fig. 1):

$$X = \alpha^* \cos(u) \cosh(v), \quad Y = \alpha^* \sin(u) \sinh(v), \quad (12a, b)$$

$$\alpha^* = \frac{\alpha}{L_{ref}}, \quad \alpha = \frac{a}{\cosh(v_0)}, \quad v_0 = \operatorname{arc} \tanh\left(\frac{b}{a}\right), \quad (13a, b)$$

Os coeficientes métricos, o jacobiano da transformação e o operador laplaciano são dados por:

$$h_u(u, v) = h_v(u, v) = \alpha^* \left[\operatorname{sen}^2(u) + \operatorname{senh}^2(v) \right]^{1/2}, \quad (14)$$

$$J(u, v) = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = \alpha^* \left[\operatorname{sen}^2(u) + \operatorname{senh}^2(v) \right], \quad (15)$$

$$\nabla^2 \theta(u, v) = \frac{1}{J(u, v)} \left[\frac{\partial^2 \theta(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u, v)}{\partial v^2} \right]. \quad (16)$$

Para o domínio compreendido em um quadrante, a equação da difusão e as condições iniciais e de contorno no sistema de coordenadas elípticas são dadas por:

$$\left[\frac{\partial^2 \theta(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u, v)}{\partial v^2} \right] + J(u, v) g(u, v) = J(u, v) \frac{\partial \theta(u, v)}{\partial \tau}, \quad \{ 0 \leq u \leq \pi/2, \quad 0 \leq v \leq v_0 \}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v)}{\partial u} = 0, \quad \{ u = 0, \quad u = \pi/2, \quad 0 \leq v \leq v_0 \}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v)}{\partial v} = 0, \quad \{ 0 \leq u \leq \pi/2, \quad v = 0 \}, \quad (19)$$

$$\theta(u, v) = 0, \quad \{ 0 \leq u \leq \pi/2, \quad v = v_0 \}. \quad (20)$$

1.3. Aplicação da TTIG

Os perfis de temperatura característicos do problema proposto serão obtidos a partir da aplicação da transformada integral sobre sua equação característica. Devido a sua propriedade bidimensional, o potencial $\theta(u, v, \tau)$ será escrito em termos de uma expansão em autofunções normalizadas obtidas de problemas auxiliares de autovalor, do tipo de *Sturm-Liouville*, para cada coordenada espacial (APARECIDO, 1997). Assim, a aplicação da transformada integral, para cada um dos problemas propostos, será feita em partes. Considere o seguinte problema auxiliar de autovalor:

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} + \mu^2\psi(u) = 0, \quad \{0 < u < \pi/2\}, \quad (21)$$

$$\frac{d\psi(0)}{du} = 0, \quad \frac{d\psi(\pi/2)}{du} = 0. \quad (22a, b)$$

As autofunções e os autovalores associados a este problema são:

$$\psi_i(u) = \cos(\mu_i u), \quad \mu_i = 2(i-1), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (23a, b)$$

As autofunções acima são ortogonais e permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\bar{\theta}_i(v) = \int_0^{\pi/2} K_i(u) \theta(u, v) du, \quad \text{transformada}, \quad (24)$$

$$\theta(u, v) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(u) \bar{\theta}_i(v), \quad \text{inversa}, \quad (25)$$

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{N_i^{1/2}}, \quad N_i = \int_0^{\pi/2} \psi_i^2(u) du = \begin{cases} \pi/2, & i = 1 \\ \pi/4, & i > 1. \end{cases} \quad (26a, b)$$

Efetando o produto interno das autofunções normalizadas $K_i(u)$ com a equação da difusão e fazendo uso das condições de contorno e da equação que definem o problema auxiliar de autovalor, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(v) \frac{\partial \bar{\theta}_j(v, \tau)}{\partial \tau} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(v, \tau) = \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(v, \tau)}{\partial v^2} + C_i(v), \quad (27)$$

$$A_{ij}(v) = \int_0^{\pi/2} K_i(u) K_j(u) J(u, v) du, \quad C_i(v) = \int_0^{\pi/2} K_i(u) J(u, v) g(u, v) du \quad (28a, b)$$

Para proceder a transformação integral relativo a coordenada v , considere o seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2 \phi(v)}{dv^2} + \lambda_j^2 \phi(v) = 0, \quad \{0 < v < v_0\}, \quad (29)$$

$$\frac{d\phi(0)}{dv} = 0, \quad \phi(v_0) = 0. \quad (30a, b)$$

As autofunções e os autovalores para este novo problema auxiliar são:

$$\phi_j(v) = \cos(\lambda_j v), \quad \lambda_j = \frac{(2j-1)\pi}{2v_0}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (31a, b)$$

As autofunções acima são ortogonais e permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\tilde{\theta}_{ij} = \int_0^{v_0} \int_0^{\pi/2} K_i(u) Z_j(v) \theta(u, v) du dv, \quad \text{transformada}, \quad (32)$$

$$\theta(u, v) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K_i(u) Z_j(v) \tilde{\theta}_{ij}, \quad \text{inversa}, \quad (33)$$

$$Z_j(v) = \frac{\phi_j(v)}{M_j^{1/2}}, \quad M_j = \int_0^{v_0} \phi_j^2(v) dv = \frac{v_0}{2}. \quad (34a, b)$$

A transformação integral sobre a coordenada v é feita efetuando-se o produto interno das autofunções normalizadas $Z_j(v)$ com a equação diferencial transformada na coordenada u . Em seguida, fazendo uso das condições de contorno e das propriedades de ortogonalidade das autofunções correspondentes ao problema auxiliar de autovalor em v , obtém-se a seguinte relação para o potencial transformado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ijmn} \frac{d\tilde{\theta}_{im}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \tilde{\theta}_{im}(\tau) + D_{im} = 0, \quad i, m = 1, 2, 3... \quad (35)$$

sendo que,

$$B_{ijmn} = \int_0^{v_0} Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv = \int_0^{\pi/2} \int_0^{v_0} K_i(u) K_j(u) Z_m(v) Z_n(v) J(u, v) du dv, \quad (36)$$

$$D_{im} = - \int_0^{v_0} Z_m(v) C_i(v) dv = - \int_0^{\pi/2} \int_0^{v_0} K_i(u) Z_m(v) J(u, v) g(u, v) du dv. \quad (37)$$

que deve satisfazer a condição inicial transformada, que é dada por:

$$\tilde{\theta}_{im}(0) = \int_0^{v_0} \int_0^{\pi/2} K_i(u) Z_m(v) \theta_i(u, v) dv du \quad (38)$$

O potencial transformado dado pela Eq. (38) pode ser obtido numericamente quando se trunca a expansão para uma dada ordem M e N :

$$\sum_{n=1}^M \sum_{j=1}^N B_{ijmn} \frac{d\tilde{\theta}_{im}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \tilde{\theta}_{im}(\tau) + D_{im} = 0. \quad (39)$$

O potencial temperatura para a célula de combustível elíptica é obtido, então, através da fórmula de inversão:

$$\theta(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^N K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(\tau). \quad (40)$$

1.4. Equação da Difusão de Nêutrons

Como já mencionado, o termo fonte da equação da energia é proporcional ao fluxo de nêutrons térmico dentro da célula de combustível. Este fenômeno pode ser representado pela teoria da difusão, a qual é baseada na Lei de *Fick* e, algumas vezes é chamado de aproximação por difusão. Esta equação e as condições de contorno são dadas por:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{L_d^2} \varphi = 0, \quad L_d^2 = \frac{D}{\Sigma_a}, \quad (41a, b)$$

$$\varphi = \varphi_P, \quad \{ (x, y) \in \Gamma \}, \quad (42)$$

Fazendo uso dos procedimentos descritos, obtém-se a equação da difusão de nêutrons adimensionalizada e homogeneizadas além de suas respectivas condições de contorno, dadas por:

$$\frac{\partial^2 \varphi(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi(u, v)}{\partial v^2} + J(u, v) [\varphi(u, v) + 1] = 0, \quad \{ 0 \leq u \leq \pi/2, \quad 0 \leq v \leq v_0 \}, \quad (43)$$

$$\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} = 0, \quad \{ u = 0, \quad u = \pi/2, \quad 0 \leq v \leq v_0 \}, \quad (44)$$

$$\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} = 0, \quad \{ 0 \leq u \leq \pi/2, \quad v = 0 \}, \quad (45)$$

$$\varphi(u, v) = 0, \quad \{ 0 \leq u \leq \pi/2, \quad v = v_0 \}. \quad (46)$$

O problema da difusão neutrônica numa célula de combustível nuclear, quando representada pela Lei de *Fick*, tem estrutura elíptica que pode ser resolvida através da aplicação TTIG coordenadas u e v e pelo produto interno de $K_i(u)$, $Z_m(u)$ e $\varphi(u, v)$. Fazendo uso das condições de contorno, o sistema infinito de equações algébricas é dado por:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{ijmn} \tilde{\phi}_{jn} + D_{im} = (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \tilde{\phi}_{im}, \quad i, m = 1, 2, 3 \dots \quad (47)$$

Apesar de todos os termos envolvidos no problema serem transformáveis, o sistema de equações não é desacoplado, devido ao termo de absorção da equação resultante, que torna esparsa a matriz solução deste sistema de equação. Finalmente, o sistema infinito de equações algébricas pode ser resolvido truncando-se a série num número de termos de ordem $i = N$ e $j = M$ suficientemente grande para obtenção da exatidão requerida.

1.5. Parâmetros Físicos de Interesse

1.5.1. Constante de Tempo

Para a análise do problema em questão é conveniente que se estabeleça um parâmetro apropriado capaz de verificar o comportamento transiente da difusão de calor em função da razão de aspecto do cilindro de seção elíptica. Para tanto, o seguinte parâmetro é definido:

$$\theta_N(u, v, \tau) = \frac{\theta(u, v, \tau)}{\theta_{máx}(\infty)}. \quad (48)$$

sendo que, conseqüentemente, tem-se que

$$\theta_{N\,máx}(\tau) = \frac{\theta_{máx}(\tau)}{\theta_{máx}(\infty)}. \quad (49)$$

Da Equação (64), observa-se que o potencial $\theta_{N\,máx}(\tau)$ estará compreendido no intervalo $[0,1]$. Assim, define-se a constante de tempo como sendo o parâmetro que determina o tempo necessário para que a temperatura $\theta_{N\,máx}(\tau)$ esteja a $1/e$ do seu valor em regime permanente, ou seja:

$$\theta_{N\,máx}(\tau_{máx}) = \frac{\theta_{máx}(\tau_{máx})}{\theta_{máx}(\infty)} = \left[1 - \frac{1}{e}\right] = 0.63212. \quad (50)$$

1.5.2. Fator de Intensificação

A taxa de geração térmica limite corresponde à situação em que a temperatura máxima da célula de combustível atinge o limite crítico, ou seja, o ponto de fusão. Esta taxa de geração térmica limite pode ser determinada por:

$$\bar{q}_{lim}''' = \frac{(T_{lim}^* - T_P^*) k_0}{\theta_{max} L_{ref}^2}. \quad (51)$$

Para analisar o comportamento da taxa de geração térmica limite em relação ao formato elíptico, os cálculos são realizados para células que possuem a mesma área transversal de uma célula de seção circular, pois, com este procedimento, o volume de combustível estará fixado. Neste sentido, define-se, aqui o fator de intensificação como:

$$\zeta = \frac{\bar{q}_{lim}'''}{\bar{q}_C''' lim}, \quad \bar{q}_C''' lim = \frac{(T_{lim}^* - T_P^*) k_0}{\theta_{centro} R^2}, \quad \theta_{centro} = \frac{1}{4}, \quad (52a, b, c)$$

Admitindo, para fins de comparação, que a temperatura prescrita na parede é a mesma para ambas as células, o fator de intensificação pode ser obtido por:

$$\zeta = \frac{\bar{q}_{lim}'''}{\bar{q}_C''' lim} = \frac{\theta_{centro} R^2}{\theta_{max} L_{ref}^2} = \frac{1}{4 \theta_{max}} \left(\frac{R}{L_{ref}} \right)^2, \quad (53)$$

3. Resultados e Discussão

Os coeficientes B_{ijmn} e D_{im} , necessários para o cálculo do potencial transformado, foram obtidos a partir de integração pelo método de quadratura de Gauss (36 pontos de quadratura). Para coerência na formulação numérica, os valores das autofunções e do jacobiano da transformação foram também calculados nos pontos de quadratura. O potencial transformado foi calculado resolvendo-se o sistema de equações diferenciais ordinárias com o auxílio da rotina computacional *DIVPAG* da Biblioteca *IMSL FORTRAN* (1979).

Foi observado que a convergência da série que determina o potencial temperatura fica mais lenta no início do transiente ($\tau < 0,01$), principalmente quando b/a tende a 1. Para estes casos é necessário truncar a série que determina o potencial temperatura $\theta(u,v,\tau)$ em uma ordem N, M superior a 20 termos para se obter um mínimo de 4 ou 5 dígitos de precisão. À medida que τ aumenta, observa-se que a série converge com um número menor de termos, por exemplo o utilizado no presente trabalho, $N = M = 15$. Entretanto, mesmo considerando um número maior de termos no truncamento da série, o tempo de processamento gasto é pequeno, cerca de 20 a 25 segundos em um computador pessoal comum (256MB RAM e 1,6 GHz).

Na Tabela 1 os resultados obtidos para a temperatura máxima e a constante de tempo máxima são apresentados para diversos valores de b/a e alguns valores de L_d^2 . Na Fig. 2, a evolução da temperatura máxima em função do tempo para $L_d^2 = 1,0$ é mostrada para diversos valores b/a , enquanto que a Fig. 3 mostra esta evolução para $b/a = 0,5$ e diversos valores L_d^2 . Já a Fig. 4 ilustra o comportamento da constante de tempo máxima em função de b/a para vários L_d^2 .

Tabela 01 – Temperatura máxima e constante de tempo máxima considerando diversos valores de b/a e L_d^2

b/a	$L_d^2 = \infty$		$L_d^2 = 2,0$		$L_d^2 = 1,0$		$L_d^2 = 0,5$	
	$\theta_{max}(\tau_{max})$	τ_{max}	$\theta_{max}(\tau_{max})$	τ_{max}	$\theta_{max}(\tau_{max})$	τ_{max}	$\theta_{max}(\tau_{max})$	τ_{max}
0,10	0,2071	0,1725	0,2004	0,1730	0,1944	0,1734	0,1838	0,1743
0,20	0,2150	0,1771	0,2082	0,1779	0,2019	0,1786	0,1908	0,1799
0,30	0,2235	0,1812	0,2165	0,1822	0,2100	0,1832	0,1984	0,1849
0,40	0,2313	0,1843	0,2241	0,1855	0,2175	0,1866	0,2055	0,1886
0,50	0,2378	0,1865	0,2305	0,1877	0,2237	0,1889	0,2114	0,1911
0,60	0,2427	0,1881	0,2353	0,1894	0,2284	0,1906	0,2160	0,1928
0,70	0,2463	0,1892	0,2388	0,1905	0,2318	0,1917	0,2192	0,1940
0,80	0,2485	0,1900	0,2410	0,1912	0,2340	0,1924	0,2212	0,1947
0,90	0,2497	0,1903	0,2421	0,1916	0,2351	0,1928	0,2223	0,1950
1,00	0,2509	0,1904	0,2425	0,1916	0,2354	0,1928	0,2226	0,1951

Fonte: Autoria própria.

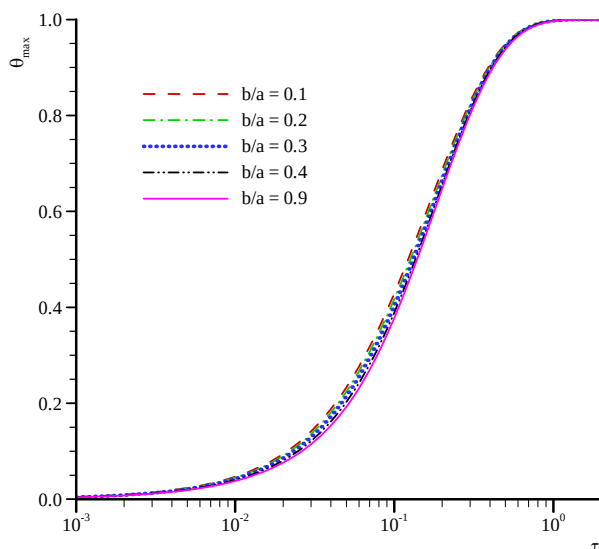


Figura 2 – Evolução da temperatura máxima em função do tempo para $L_d^2 = 1,0$ considerando alguns valores de b/a .

Fonte: Autoria própria.

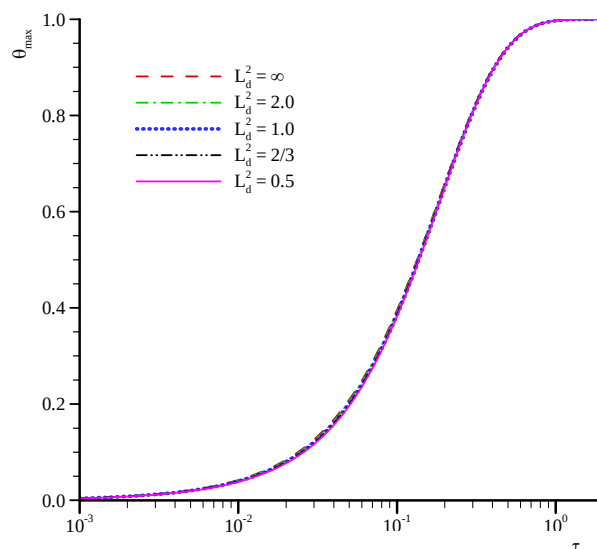


Figura 3 – Evolução da temperatura máxima em função do tempo para $b/a = 0,5$ considerando alguns valores de L_d^2 .

Fonte: Autoria própria.

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos para a temperatura máxima em regime permanente e o fator de intensificação para diversos valores de b/a e L_d^2 . A Fig. 5 ilustra o comportamento do fator de intensificação em função de b/a para alguns valores de L_d^2 . Já as Figs. 6 e 7, mostram a distribuição da temperatura em regime permanente para $b/a = 0,5$ e $L_d^2 = \infty$ e para $b/a = 0,5$ e $L_d^2 = 0,5$, respectivamente.

Tabela 02 – Temperatura máxima em regime permanente e fator de intensificação para diversos valores de b/a e L_d^2

b/a	$L_d^2 = \infty$		$L_d^2 = 2,0$		$L_d^2 = 1,0$		$L_d^2 = 0,5$	
	$\theta_{m\acute{a}x}(\infty)$	ζ	$\theta_{m\acute{a}x}(\infty)$	ζ	$\theta_{m\acute{a}x}(\infty)$	ζ	$\theta_{m\acute{a}x}(\infty)$	ζ
0,10	0,19802	5,0500	0,19786	5,0540	0,19771	5,0580	0,19739	5,0660
0,20	0,38462	2,6000	0,38353	2,6073	0,38246	2,6147	0,38034	2,6292
0,30	0,55046	1,8167	0,54751	1,8265	0,54459	1,8362	0,53888	1,8557
0,40	0,68966	1,4500	0,68416	1,4616	0,67877	1,4733	0,66828	1,4964
0,50	0,80000	1,2500	0,79167	1,2632	0,78353	1,2763	0,76783	1,3024
0,60	0,88236	1,1333	0,87127	1,1478	0,86049	1,1621	0,83984	1,1907
0,70	0,93961	1,0643	0,92629	1,0796	0,91340	1,0948	0,88884	1,1251
0,80	0,97562	1,0250	0,96131	1,0402	0,94750	1,0554	0,92127	1,0855
0,90	0,99449	1,0055	0,98179	1,0185	0,96951	1,0314	0,94615	1,0569
1,00	1,00000	1,0000	0,99468	1,0053	0,98943	1,0107	0,97927	1,0212

Fonte: Autoria própria.

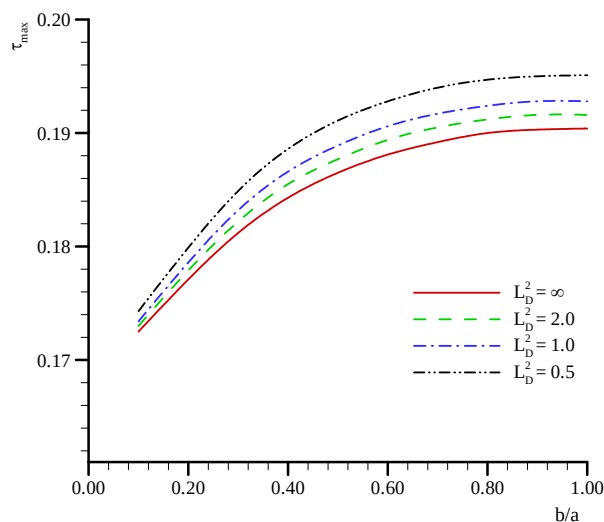


Figura 4 – Constante de tempo máxima em função de b/a considerando alguns valores de L_d^2 .

Fonte: Autoria própria.

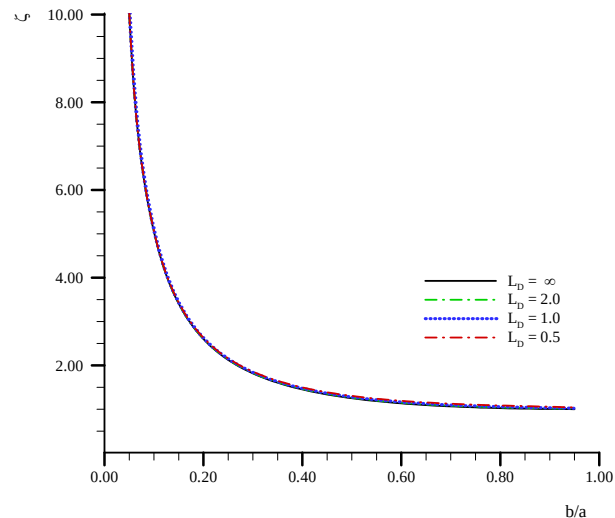


Figura 5 – Fator de intensificação em função de b/a considerando alguns valores de L_d^2 .

Fonte: Autoria própria.

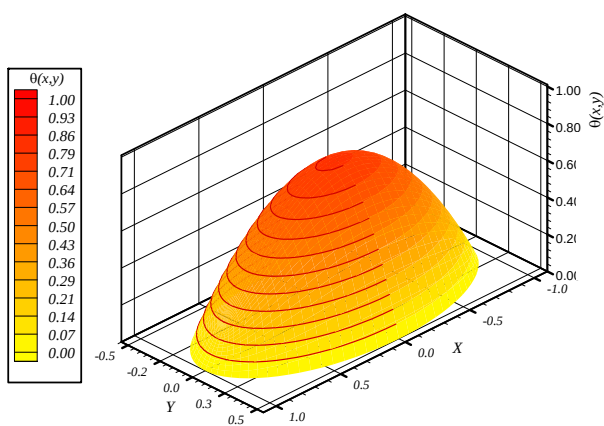


Figura 6 – Distribuição da temperatura em regime permanente para $b/a = 0,5$ e $L_d^2 = \infty$.

Fonte: Autoria própria.

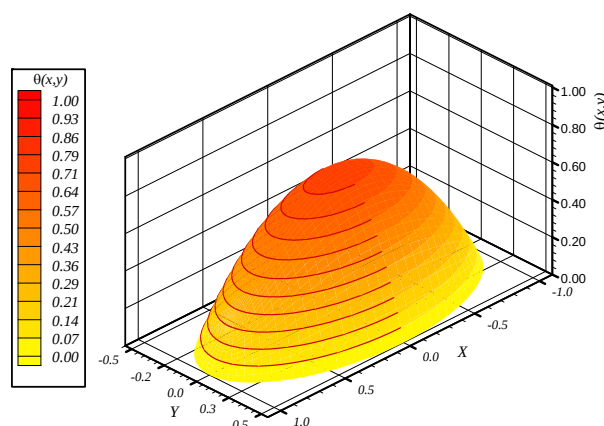


Figura 7 – Distribuição da temperatura em regime permanente para $b/a = 0,5$ e $L_d^2 = 0,5$.

Fonte: Autoria própria

4. Conclusões

A utilização de técnicas analítico-numéricas para solução de problemas difusivos e difusivos-convectivos tem conquistado espaço no meio técnico-científico devido à sua precisão e ao seu baixo custo computacional quando comparado aos métodos puramente numéricos.

Sendo assim, neste trabalho analisou-se o problema difusivo transiente com fontes variáveis que são proporcionais ao fluxo neutrônico em células cilíndricas de combustível nuclear com seção transversal elíptica submetidas a condições de primeiro tipo utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada. Para esta análise, as propriedades termofísicas são consideradas variáveis com a temperatura. A dificuldade inerente da aplicação das condições de contorno em problemas com esta geometria foi removida empregando-se uma mudança adequada de coordenadas. Para facilitar o tratamento analítico, a equação da difusão foi convenientemente linearizada através da técnica da transformada de Kirchhoff. Feito isso, a equação da energia resultante é resolvida através da aplicação da TTIG. Observa-se que a expansão que determina o potencial temperatura apresenta convergência lenta no início do transiente.

Constantes de tempo definidas em relação à temperatura máxima, a distribuição da temperatura em regime permanente e fator de intensificação foram calculadas para diversos valores de b/a e alguns valores de L_d^2 .

Finalizando, observa-se que a TTIG foi aplicada com sucesso para a obtenção de solução de problemas difusivos transientes multidimensionais, ressaltando-se, aqui, o presente problema com domínio de geometria elíptica, o qual não admite solução pelas técnicas analíticas clássicas.

Referências

ALVES, T.A. **Aplicação da transformada integral na solução de uma classe de problemas difusivos e difusivo-convectivos em domínios de geometria não-convencionais**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, Brasil, 360p, 2006.

ALVES, T.A.; PELEGRINI, M.F.; WOISKI, E.R.; MAIA, C.R.M. Limit power of nuclear fuel cells with biconcave cross sections. **Proceedings of the 10th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering**, Rio de Janeiro, Brazil, in CD-ROM (*in portuguese*), 2004.

APARECIDO, J.B. How to choose eigenvalue problems when using generalized integral transform to solve thermal. **Proceedings of the 14th Brazilian Congress of Mechanical Engineering**, Bauru, Brazil, in CD-ROM, 1997.

COTTA, R.M. **The integral transform method in thermal and fluids science and engineering**. New York: Begell House Inc., 1998.

COTTA R.M.; ÖZISIK, M.N. Diffusion problems with general time-dependent coefficients. **Brazilian Journal of Mechanical Sciences**, vol. 4, pp. 269-292, 1987.

DINIZ A.J.; SILVA J.B.C.; ZAPAROLLI E.L. Analytical solution of ablation problem with non linear coupling equation. **Hybrid Methods in Engineering Modeling Programming Analysis Animation**, pp. 265-277, 1990.

GLASSTONE, S.; SESONSKE, A. **Nuclear reactor engineering: reactor systems engineering**. London: Chapman & Hall, 1994.

IMSL LIBRARY, Edition 7, **GNB Building**, 7500 Ballaire Blod, Houston, Texas 77036, 1979.

MAIA, C.R.M. **Solução de problemas difusivos e difusivo-convectivos em domínio de geometria elíptica e bicôncava pela técnica da transformada integral generalizada**. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 251p., 2003.

MAIA, C.R.M.; APARECIDO, J.B.; MILANEZ, L.F. Limiting thermal energy generation rate. **Proceedings of the 24th Iberian Latin American Congress on Computational Methods**, Ouro Preto, Brazil, in CD-ROM, 2003.

MIKHAILOV M.D.; COTTA R.M. Ordering rules for double and triple eigenseries in the solution of multidimensional heat and fluid flow problems. **International Communications of Heat and Mass Transfer**, vol. 23, pp. 299-303, 1996.

ÖZISIK, M.N. **Heat conduction**. New York: John Wiley & Sons, 1993.

PELEGRINI, M.F.; ALVES, T.A.; MAIA, C.R.M.; RAMOS, R.A.V. Solution of unstead difusives problems with sources by generalized integral transform technique. **Proceedings of the 25th Iberian Latin American Congress on Computational Methods**, Recife, Brazil (*in portuguese*), 2004.

PELEGRINI, M.F., **Aplicação da técnica da transformada integral para a solução de problemas difusivos transientes com propriedades termofísicas variáveis**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, Brasil, 125p, 2005.